بكالوريا :دورة جوان 2010

الموضوع الأول

التمرين الأول :

المستوي المركب منسوب معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 1+i$ ، $z_B = 3i$ على الترتيب .

1. أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

2. ليكن التشابه المباشر S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z' = 2iz + 6 + 3i$.

أ / عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب / عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

جـ / استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(A;2)\}$.

أ / عين z_D لاحقة النقطة D.

ب / عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4. لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون العدد $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ / تحق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب / أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$.عين حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط : $A(1;1;0)$ ، $B(2;1;1)$ ، $C(-1;2;-1)$.

1 – أ / بين أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية .

ب / بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x + y - z - 2 = 0$.

2 – ليكن (P) و (Q) المستويين الذين معادلتيهما على الترتيب :

$(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$ و $(Q): 2x + y - z - 1 = 0$.

و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له .

أ / أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

ب / تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

$3-$ عين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) .

التمرين الثالث :

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=1+ln(2x-1)$ ،

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)$.

2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عين فاصلة النقطة من المنحني (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) الذي معادلة له : $y=x$.

4) أ / أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي من المجال I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:
$f(x)=ln(x+a)+b$ ، حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعينهما.

ب / استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ln ثم أرسم (C) و (C_f).

II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال I كما يلي : $g(x)=f(x)-x$.

1) أحسب : $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بين أن: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ / أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α .

تحقق أن : $2<\alpha<3$.

ب / أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) .

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

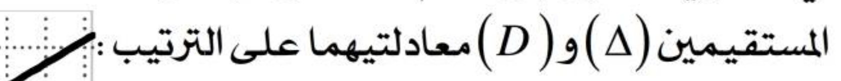
1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا



المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب :

$y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

$1-$ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

جـ) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$2-$أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{2}{3}$.

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$3-$نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة عبارة u_n بدلالة n .

جـ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين الثاني :

1 . حل ، في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي .

2 . في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C ، و D لواحقها على الترتيب : $z_A = 3+3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ / بين أن نعتبر النقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم .

ب / عين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B .

جـ / بين أن النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D .

د / استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث :

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $x-2y+z+3=0$.

1) نذكر أن حامل محور الفواصل $(O;\vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

- عين إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O;\vec{i})$ مع المستوي (P).

2) B و C نقطتان من الفضاء حيث : $B(0;0;-3)$ ، $C(-1;-4;2)$.

أ- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

ب- أحسب الطول AB .

جـ- أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P).

3) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C والعمودي على المستوي (P).

ب- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ- أحسب مساحة المثلث ABC .

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ').

4. بين أن النقطة $w\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

5. أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ ، $-1,4<\beta<-1,3$

ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ) أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحني (C_f).

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$.

حل بكالوريا :دورة جوان 2010

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1 . لدينا: $|z_A| = |1+i| = \sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1 = arg(z_A)$. لدينا: $\begin{cases} cos\,\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ،

ومنه : $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $\dfrac{\pi}{4}$ عمدة لـ z_A ، إذن الشكل الأسي لـ z_A هو : $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

ولدينا: $|z_B| = |3i| = 3$ ، لتكن $\theta_2 = arg(z_B)$. لدينا: $\begin{cases} cos\,\theta_2 = \dfrac{0}{3} = 0 \\ sin\,\theta_2 = \dfrac{3}{3} = 1 \end{cases}$ ، ومنه :

$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $\dfrac{\pi}{4}$ عمدة لـ z_B ، إذن الشكل الأسي لـ z_B هو : $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2 . أ / الكتابة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث $a = 2i$ و $b = 6 + 3i$ ، إذن :مركزه النقطة ذات اللاحقة:

$\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{6+3i}{1-2i} = \dfrac{6+3i}{1-2i} \times \dfrac{1+2i}{1+2i} = 3i = z_B$ ، إذن مركز التشابه S هو النقطة B

ونسبته: $|a| = |2i| = 2$ ، وزاويته: $arg(a) = arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$.

ب / $C = S(A)$ معناه: $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$ ، ومنه: $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$

ومنه: $z_C = 4 + 5i$.

جـ / لدينا: $C = S(A)$ ومنه من تعريف التشابه المباشر S ينتج : $\begin{cases} BC = 2BA \\ (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

ومنه : المثلث ABC قائم في B .

3. أ/ لدينا: $z_D = \frac{2\times z_A + (-2)\times z_B + 2\times z_C}{2-2+2}$ ، بالحساب نجد: $z_D = 5+3i$.

ب/ لدينا: $z_B - z_A = -1+2i$ ، ومن جهة: $z_C - z_D = -1+2i$ ، ومنه:

$z_B - z_A = z_C - z_D$ ، وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع .

ومن جهة اخرى: $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$ و $BC \neq BA$ لأن: $BC = 2BA$ ، وبالتالي متوازي الأضلاع $ABCD$ مستطيل .

4. أ/ نبين أن العدد $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ عدد حقيقي موجب تماما ، لدينا:

$\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i-(6+3i)}{5+3i-(6+3i)} = \frac{-6}{-1} = 6$ ، بالفعل: $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ عدد حقيقي موجب تماما.

ب/ لدينا : $arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB})$

العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ حقيقي موجب تماما إذا وفقط إذا كان: $arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 2\pi k$

أي: $(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}) = 2\pi k$ ، وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MD}$ مرتبطان خطيا ومن نفس الاتجاه ، ومنه: $(\Delta) = (BD) - [BD]$. (المستقيم (Δ) باستثناء القطعة المستقيمة $[BD]$)

التمرين الثاني :

1 – أ/ الشعاعان $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{1}{-2} \neq \frac{1}{-1}$

ب/ نبين أن إحداثيات النقط A ، B ، C تحقق المعادلة: $x+y-z-2=0$ ، بالفعل لدينا:

من أجل A المساواة : $1+1-0-2=0$ محققة.

من أجل B المساواة : $2+1-1-2=0$ محققة.

من أجل C المساواة : $-1+2-(-1)-2=0$ محققة.

2 – أ/ الجملة: $\begin{cases} x = 0+1\times t \\ y = 4+5\times t \\ z = 3+3\times t \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} x = t \\ y = 4+5t \\ z = 3+3t \end{cases}$ مع t عدد حقيقي هي تمثيل وسيطي للمستقيم (D).

ب/ بتعويض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي (P) نجد المساواة :

$-t+2(4+5t)-3(3+3t)+1=0$ ، أي : $10t-10t-9+9=0$ ، أي : $0=0$ محققة مهما كان الوسيطي الحقيقي t .

و بتعويض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي (Q) نجد المساواة :
$-2t+(4+5t)-(3+3t)-1=0$ ، أي : $5t-5t+4-4=0$ ، أي : $0=0$ محققة مهما كان الوسيطي الحقيقي t .
إذن كل نقطة من المستقيم (D) تنتمي إلى كل من المستويين (P) و (Q) ، وهذا مايدل أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).
$3-$ بما أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) فإنه لتعيين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) يكفي تعيين تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (ABC) .
لأجل ذلك نحل الجملة :
$$\begin{cases} x=-t\dots(1) \\ y=4+5t\dots(2) \\ z=3+3t\dots(3) \\ x+y-z-2=0\dots(4) \end{cases}$$
بتعويض x ، y ، z من (1) و (2) و (3) في المساواة (4) نجد:
$-t+4+5t-(3+3t)-2=0$ ومنه : $t=1$ ، ثم بتعويض $t=1$ في المساوايات (1) و (2) و (3) نجد : $x=-1$ و $y=9$ و $z=6$. إذن المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في النقطة : $D(-1;9;6)$.

التمرين الثالث :

I) 1) ـ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[1+\ln(2x-1)]=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
ـ لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}(2x-1)=0^+$ وبما أن: $\lim\limits_{X\xrightarrow{>}0}\ln X=-\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\ln(2x-1)=-\infty$
ومنه: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}[1+\ln(2x-1)]=-\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}f(x)=-\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا: $f'(x)=0+\dfrac{(2x-1)'}{2x-1}=\dfrac{2}{2x-1}>0$
لأن من أجل كل x من I : $0<2x-1$ ، ومنه: الدالة f متزايدة تماما على المجال I ويكون جدول تغيراتها:

x	$\frac{1}{2}$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) نحل المعادلة: $f'(x)=1$ ، لكون معامل توجيه المستقيم (d) يساوي 1 ، ومنه:

$f'(x)=1$ تكافئ $\frac{2}{2x-1}=1$ ، أي: $2x-1=2$ ، ومنه: $x=\frac{3}{2}$.إذن: فاصلة النقطة من المنحني (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) هي $\frac{3}{2}$.

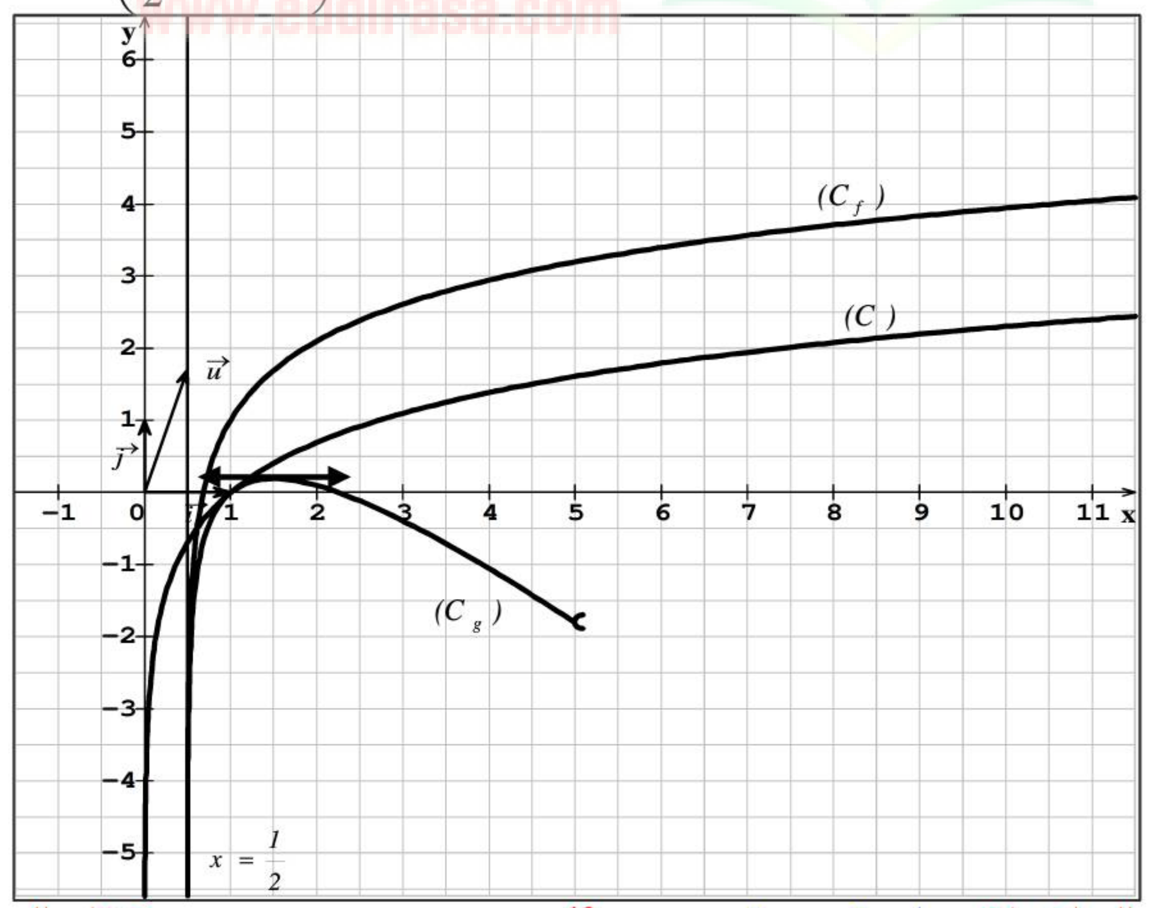
4) من أجل كل x من I لدينا:

$f(x)=1+ln(2x-1)=1+ln\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=1+ln\,2+ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ، إذن:

$f(x)=ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+ln\,2$ ، ومنه: $a=-\frac{1}{2}$ ، $b=1+ln\,2$.

ب / من المساواة $f(x)=ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+ln\,2$ يمكن استنتاج رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ln بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\left(\frac{1}{2};1+ln\,2\right)$.

<u>الرسم:</u>



II) $g(x)=f(x)-x=1-x+\ln(2x-1)$.

1) ـ لدينا: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)=-\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} [f(x)-x]=-\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)=-\infty$.

اثبات أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$:

من أجل كل x من I لدينا: $g(x)=(2x-1)\left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]$

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x}{2x-1}=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$ ، ولحساب النهاية: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1}$ ، نضع:

$u=2x-1$ ، فيكون: $x \to +\infty$ تكافئ $u \to +\infty$ ، ومنه:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1}=\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u}=0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\frac{1}{2}$ ، وبما أن:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1)=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$.

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا:

$g'(x)=f'(x)-(x)'=\frac{2}{2x-1}-1=\frac{3-2x}{2x-1}$ ، إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $3-2x$

ولدينا:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	↘	$-\infty$

3) أ / لدينا: $g(1)=1-1+ln(2\times1-1)=0$ ،

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و تأخذ قيمها في المجال

$\left]-\infty;-\frac{1}{2}+ln\,2\right[$ ، وبما أن: $-\frac{1}{2}+ln\,2>0$ فإن: $0\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}+ln\,2\right[$ ، ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α ، ولكون:

$g(2)=0,0986...>0$ و $g(3)=-0,3905...<0$ فإن: $2<\alpha<3$.

ب / الرسم :أنظر الشكل السابق .

4) من دراسة تغيرات الدالة g و السؤال 3) نتحصل على إشارة $g(x)$ على النحو التالي :

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وتكون وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) كما يلي :

- (C_f) تحت المستقيم (d) على كل من المجالين $\left]\frac{1}{2};1\right[$ ، $]\alpha;+\infty[$.

- (C_f) فوق المستقيم (d) على المجال $]1;\alpha[$.

- (C_f) يقطع المستقيم (d) في النقطتين $A(1;1)$ ، $B(\alpha;\alpha)$.

5) بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I فإنها متزايدة تماما على المجال $]1;\alpha[$ ، ومنه:

$f(1)<f(x)<f(\alpha)$ ، وبما ان: $f(1)=1$ و $f(\alpha)=\alpha$ ، لأن $g(\alpha)=0$ ، فإن:

$1<f(x)<\alpha$ ، إذن:من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى

المجال $]1;\alpha[$.

III) 1) لدينا:

$$u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\left[ln\left(2\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)-1\right]=1+ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ومنه: $u_n=1+2\,ln\,3-3\,ln\,2$ تكافئ $1+ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=1+2\,ln\,3-3\,ln\,2$ ، أي:

$ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=ln\,9-ln\,8$ ، أي: $ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=ln\left(\frac{9}{8}\right)$ ، ومنه: $\frac{n+1}{n}=\frac{9}{8}$ ، ومنه:

$9n=8n+8$ ، ومنه: $n=8$.

2) لدينا: $u_n = 1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1+\ln(n+1)-\ln n$ ، ومنه:

$$\begin{cases} u_1 = 1+\ln 2-\ln 1 \\ u_2 = 1+\ln 3-\ln 2 \\ u_3 = 1+\ln 4-\ln 3 \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} = 1+\ln n-\ln(n-1) \\ u_n = 1+\ln(n+1)-\ln n \end{cases}$$

، بجمع المساوايات طرفا إلى طرف نجد :

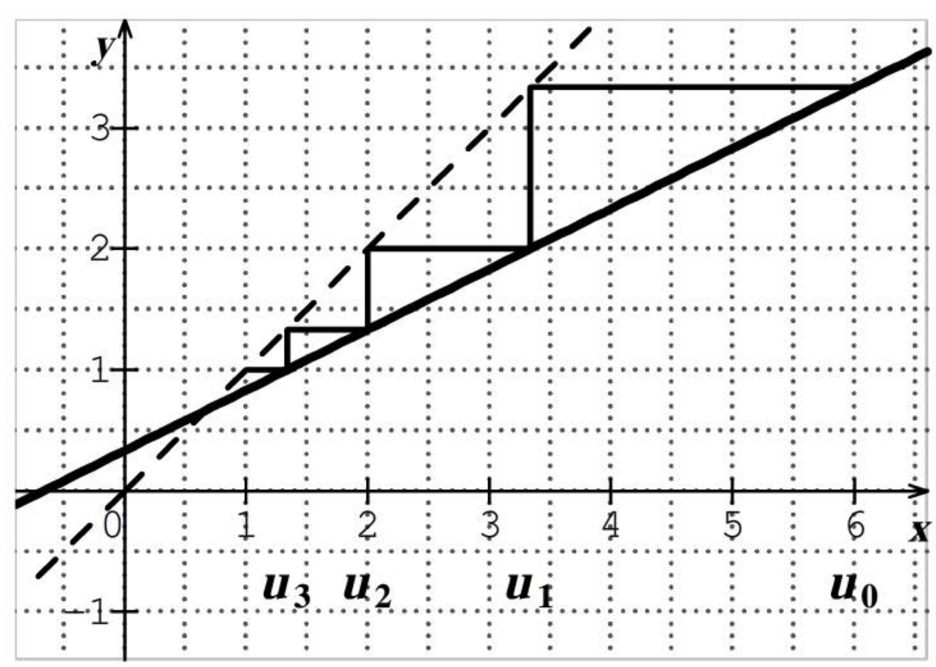
$$S_n = (1+\ln 2-\ln 1)+(1+\ln 3-\ln 2)+(1+\ln 4-\ln 3)+\dots$$
$$+[1+\ln n-\ln(n-1)]+[1+\ln(n+1)-\ln n]$$
$$=(1+1+1+\dots+1)+\ln(n+1) = n\times 1+\ln(n+1)$$

إذن: $S_n = n+\ln(n+1)$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 – أ) أنظر الرسم .



ب) نضع $x = \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ فنجد $x = \frac{2}{3}$

ومنه (Δ) و (D) يتقاطعان في النقطة $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

جـ) التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة.

2. أ) * المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0>\frac{2}{3}$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n>\frac{2}{3}$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1}>\frac{2}{3}$.

لدينا : $u_n>\frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}>\frac{2}{3}$ أي : $u_{n+1}>\frac{2}{3}$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{2}{3}$.

ب) لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-u_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}u_n$ ، وبما أن $u_n>\frac{2}{3}$ فإن $-\frac{1}{2}u_n<-\frac{1}{3}$

ومنه : $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}u_n<0$ ، أي $0>u_{n+1}-u_n$ ، إذن (u_n) متناقصة.

3. أ) لدينا : $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ ومنه :

$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}v_n$ ، ومنه (v_n) متتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=u_0-\frac{2}{3}=6-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$.

ب) لدينا : $v_n=v_0\times q^n=\frac{16}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه : $u_n=v_n+\frac{2}{3}=\frac{16}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$.

جـ) لدينا :

$$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{16}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{32}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه : $S'_n=\left(v_0+\frac{2}{3}\right)+\left(v_1+\frac{2}{3}\right)+\ldots+\left(v_n+\frac{2}{3}\right)=(v_0+v_1+\ldots+v_n)+\frac{2}{3}(n+1)$.

$$=\frac{32}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{2}{3}(n+1)$$

التمرين الثاني :

1. لدينا: $\Delta = 36 - 72 = -36 = (6i)^2$ ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$ ، $z_2 = \overline{z_1} = 3-3i$.

ـ لدينا: $|z_1| = 3\sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1 = arg(z_1)$. لدينا: $\begin{cases} cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، ومنه : $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

وبالتالي: $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه : $z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2. أ / لدينا: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$ ،أي: $OA = OB = OC = OD = 3\sqrt{2}$

ومنه: النقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O ونصف القطر $3\sqrt{2}$.

ب / لدينا: $z_B - z_O = e^{i\theta}(z_A - z_O)$ ، ومنه: $e^{i\theta} = \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

إذن: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ هي زاوية الدوران R .

جـ / لدينا: $z_C = -z_A$ إذن: $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ وبالتالي النقط A ، O و C في استقامية .

ولدينا: $z_D = -z_B$ إذن: $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ وبالتالي النقط B ، O و D في استقامية .

د / لدينا: النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D والنقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O أي $[AC]$ و $[BD]$ قطران في هذه الدائرة ، إذن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ولدينا: B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، إذن : $\overrightarrow{OA}$ عمودي على $\overrightarrow{OB}$

وبالتالي (AC) عمودي على (BD) و $AC = BD$.

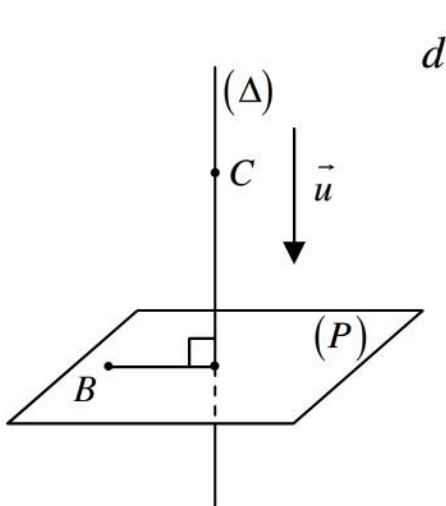
نستخلص أن متوازي الأضلاع $ABCD$ قطراه متعامدان ومتقايسان فهو مربع .

التمرين الثالث :

1) لدينا : $(P): x - 2y + z + 3 = 0$ و $(O;\vec{i}): \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ، فبتعويض $y = 0$ و $z = 0$ في معادلة المستوي (P) نجد: $x + 3 = 0$ ، أي : $x = -3$ ، ومنه : $A(-3;0;0)$.

2) أ – بتعويض إحداثيات النقطة B في معادلة المستوي (P) نجد : $0 - 0 - 3 + 3 = 0$ محققة.

ب – لدينا : $AB = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-0)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



جـ- لدينا : $d(C;(P))=\frac{|-1+8+2+2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$

3) أ- المستقيم (Δ) يمر بالنقطة $C\left(-1;-4;2\right)$

والشعاع $\vec{n}(1;-2;1)$ هو شعاع توجيه له ومنه الجملة :

$\begin{cases}x=-1+1\times t\\ y=-4+(-2)\times t\\ z=2+1\times t\end{cases}$ ، أي : $\begin{cases}x=-1+t\\ y=-4-2t\\ z=2+t\end{cases}$ ،

مع t عدد حقيقي هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

ب – بتعويض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد: $\begin{cases}-3=-1+t\\ 0=-4-2t\\ 0=2+t\end{cases}$

أي : $\begin{cases}t=-2\\ t=-2\\ t=-2\end{cases}$ ، بما أن t وحيد فإن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ- بما أن (Δ) عمودي على المستوي (P) و A ، C

نقطتين من (Δ) و A ، B نقطتين من (P) فإن

المثلث ABC قائم في A ، إذا رمزنا بـ: S إلى مساحة

المثلث ABC ، فإن :

$S=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{AB\times d(C;(P))}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}}{2}=6\sqrt{3}$.

التمرين الرابع :

1. أ) لدينا: $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$ ، ومنه : $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^{x}-1}=1$ ،وبما أن : $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ ، فإن:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ ، ومنه : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{e^{x}-1}=0$ ،وبما أن : $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ ، فإن:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) لدينا: $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(e^{x}-1)=0^{+}$ ، ومنه : $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(-\frac{1}{e^{x}-1}\right)=-\infty$ ، وبما أن : $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x=0$ ، فإن:

$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(e^x-1)=0^-$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(-\frac{1}{e^x-1}\right)=+\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x=0$ ، فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty$.

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty$ ، نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلة له: $x=0$ (محور التراتيب) كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

2. الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين: $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$ ولدينا:

$f'(x)=1-\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}=1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}>0$ ، إذن: الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين: $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$. ويكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3. أ) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{e^x-1}=0$. ومنه المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{e^x-1}-1\right)=0$. ومنه: المستقيم $(\Delta'): y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) - وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا: $f(x)-x=-\frac{1}{e^x-1}$ ، إشارة الفرق $f(x)-x$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	‖	$+$
$f(x)-x$	$+$	‖	$-$

إذن: (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;0[$ ويقع تحت (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

- وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ') :

لدينا: $f(x)-(x+1)=-\frac{1}{e^x-1}-1=-\frac{e^x}{e^x-1}$ ، إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
e^x-1	$-$	$+$
$f(x)-(x+1)$	$+$	$-$

إذن : (C_f) يقع فوق (Δ') على المجال $]-\infty;0[$ ويقع تحت (Δ') على المجال $]0;+\infty[$.

4 . إثبات أن النقطة $w\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}^*$ ولدينا:

$$f(2\times0-x)+f(x)=f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{e^x-1}{e^x-1}=1=2\times\frac{1}{2}$$

ومنه: $w\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

5 . أ) اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$

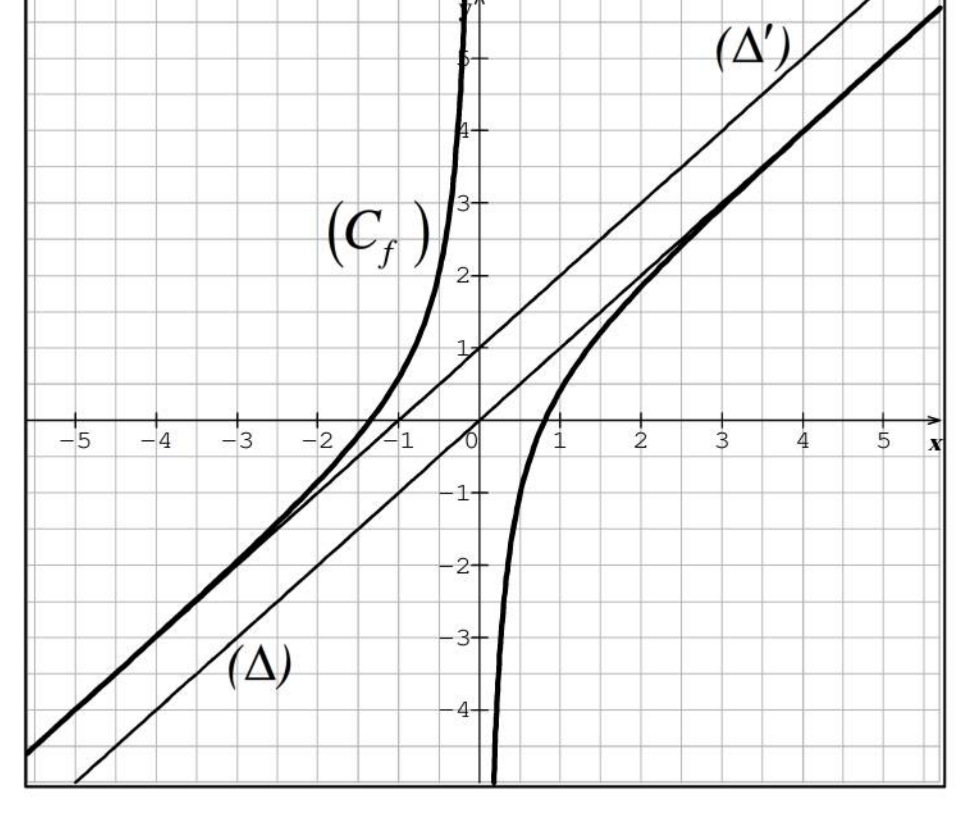
ـ لدينا: $[\ln 2;1]\subset]0;+\infty[$ ، إذن : f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 2;1]$ وبما أن : $f(\ln 2)\approx-0,31<0$ و $f(1)\approx0,41>0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]\ln 2;1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$.

ـ ولدينا: $[-1,4;-1,3]\subset]-\infty;0[$ ، إذن : f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,4;-1,3]$ وبما أن : $f(-1,4)\approx-0,07<0$ و $f(-1,3)\approx0,07>0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا حلا وحيدا $\beta\in[-1,4;-1,3]$ يحقق: $f(\beta)=0$.

ب) معامل توجيه المستقيم (Δ) يساوي : 1 ، ومنه نضع: $f'(x)=1$ ، أي : $1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ ،

ومنه: $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ ،ومنه: $e^x=0$ ، وهذا مستحيل وبالتالي لا توجد مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ) الرسم :



د) لدينا: $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $(m-1)e^{-x}\times e^{x}=m\times e^{x}$ ، أي: $m-1=me^{x}$

أي : $m=-\frac{1}{e^{x}-1}$ ، ومنه: $x-\frac{1}{e^{x}-1}=x+m$ ، إذن : $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة $f(x)=m+1$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلة له : $y=x+m$. إن المستقيم (Δ_m) يوازي كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') ، والوسيط m هو الترتيب إلى المبدأ . إذن :

- لما $m\in]-\infty;0[$ فيوجد حل وحيد موجب .
- لما $m\in[0;1]$ فلا توجد حلول .
- لما $m\in]1;+\infty[$ فيوجد حل وحيد سالب .